

УДК 539. 3

А. Сяський, докт. техн. наук; В. Кот

Рівненський державний гуманітарний університет

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПЛАСТИНКИ З ЧАСТКОВО ПІДСИЛЕНИМ КРИВОЛІНІЙНИМ КОНТУРОМ ПРИ ЇЇ ЦИЛІНДРИЧНОМУ ЗГИНІ

Резюме. Розв'язано контактну задачу про часткове підсилення контуру криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці тонким пружним ребром змінної жорсткості на згин та кручення. Математичну модель задачі побудовано у вигляді системи двох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь із логарифмічними ядрами. Методом колокації досліджено вплив жорсткості підсилювальних елементів на розподіл напружень на контурі отвору пластини.

Ключові слова: контактна задача, часткове підсилення, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння.

A. Syasky, V. Kot

STRESS-STRAIN STATE OF A PLATE WITH A PARTLY STRONGER CURVILINEAR CONTOUR IN ITS CYLINDRICAL BENDING

The summary. A contact problem on a partial reinforcement of curvilinear hole contour in an infinite isotropic plate by a thin elastic edge of variable stiffness in bending and torsion is considered. Mathematical model as a system of two singular integro-differential equation with logarithmic kernels is constructed. The influence of stiffening elements on the stress distribution on the contour of plate hole is investigated by collocation method.

Key words: contact problem, partial reinforcement, singular integro-differential equation.

Вступ. У багатьох галузях машинобудування широкого застосування набули пластинчасті деталі, які послаблені криволінійними отворами. При циліндричному згині таких деталей на контурі отвору виникають зони з високою концентрацією напружень. Їх підкріплення розіркненими тонкими пружними ребрами сталої або змінної жорсткості дозволяє суттєво зменшити концентрацію напружень і збільшити жорсткість і стійкість конструкції.

Задачі часткового підсилення контуру отвору в пластині, що перебуває в умовах циліндричного згину тонкими пружними ребрами змінної жорсткості на згин, розглянуто в [1–3]. Методом колокації досліджується напружений стан ізотропної пластинки з отвором, контур якого частково підсилений одним або двома симетричними пружними ребрами змінної жорсткості. Що стосується розіркнених пружних ребер, наділених жорсткостями на згин і кручення, то такі задачі досліджені недостатньо. У роботах [4, 5] розглянуто задачі про часткове симетричне відносно осі отвору підсилення контуру отвору одним або двома ребрами змінної жорсткості.

На підставі уточненого варіанта граничних умов запропоновано метод розрахунку напружено-деформованого стану у пластинці, яка перебуває в умовах циліндричного згину на нескінченності, контур криволінійного отвору якої частково підсилений пружним ребром загального положення.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, контур якого має форму правильного N -кутника із закругленими кутами. Систему декартових координат (Ox) оберемо таким чином, щоб вісь Ox співпадала з віссю полярної системи координат (ρ, δ) і віссю симетрії отвору (рис. 1.).

Контур L на проміжку $L_1 = [\alpha_0^*; \beta_0^*]$ підсилений тонким пружним стрижнем змінної поперечного перерізу $2h_0b(s)$, головні осі інерції якого розміщені в середній площині пластинки (s – дуга на L ; α_0^*, β_0^* – полярні кути ділянок підсилення; $2h_0$ – стала

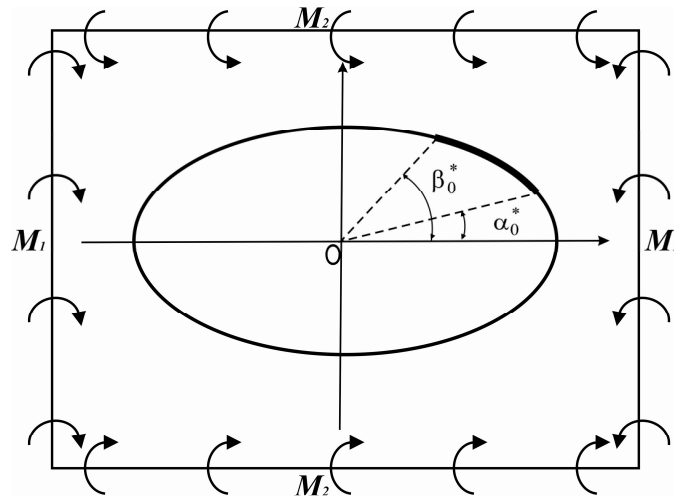


Рисунок 1. Розрахункова схема пластинки

товщина підсилення; $b(s)$ – змінна його ширина). Пластинка згинається під дією рівномірно розподілених на нескінченності моментів інтенсивності M_1 і M_2 . Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних моментів M_ρ, P у зоні підсилення та кільцевих M_λ і крутих $H_{\rho\lambda}$ моментів на контурі отвору.

Основні рівняння задачі. Моделюючи підсилення тонкою пружною лінією, наділеною жорсткостями на згин $g_1(s)$ і кручення $g_2(s)$, граничні умови задачі можна записати у вигляді [4]

$$X = -\frac{1}{g_1} \{R_1(\lambda)f_1(\lambda) + R_2(\lambda)f_2(\lambda)\}; \quad Y = \frac{1}{g_2} \{R_1(\lambda)f_2(\lambda) - R_2(\lambda)f_1(\lambda)\}. \quad (1)$$

Тут введено позначення

$$R_1(\lambda) + iR_2(\lambda) = e^{i\theta} = \frac{\omega'(\sigma)\sigma}{|\omega'(\sigma)|}; \quad \sigma = e^{i\lambda}; \quad \omega'(\sigma) = \alpha + i\beta; \quad f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} \{M_\rho^* + iP^*\} e^{it} dt;$$

$M_\rho^* + iP^* = (M_\rho + iP)\omega'(\sigma)$; $z = \omega(\xi) = R_0(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}})$ – функція, що здійснює конформне відображення зовнішності одиничного кола в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область $z = x + iy$, яку займає середня площа пластинки; R_0 – характерний розмір отвору (не порушуючи загальності, приймаємо $R_0 = 1$); ε – параметр, який визначає відхилення форми многокутника від кола; $[\alpha_0, \beta_0]$ – образ ділянки $[\alpha_0^*, \beta_0^*]$ при відображенні $\omega(\xi)$; X, Y – деформації згину і кручення контуру L ; θ – кут між нормаллю до L і додатним напрямком осі Ox .

Підставляючи в (1) замість X, Y їх інтегральні подання через функції M_ρ^* і P^* , в [4] побудовано систему двох сингулярних інтегральних рівнянь для визначення контактних моментів у зоні симетричного відносно осі отвору підсилення контуру L тонким пружним стрижнем. Така система переозначена, оскільки для виконання умов рівноваги підсилення вона не містить необхідну кількість сталих. Це зумовлено тим,

що граничні умови (1) містять другі похідні від прогину w , а природні граничні умови другої основної задачі технічної теорії згину пластин [6,7] повинні містити лише похідні першого порядку.

Для усунення цієї проблеми розглянемо співвідношення

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = e^{i\theta} \left(\frac{\partial w}{\partial n} + i \frac{\partial w}{\partial s} \right).$$

Продиференціювавши його по s , після певних перетворень отримаємо

$$d\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}\right) = (X - iY)\omega'(\sigma)d\sigma. \quad (2)$$

Підставляючи (1) в (2), знаходимо

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} & \left\{ \left[f_2(t) \left[R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + f_1(t) R_1(t) R_2(t) \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + i \left[f_2(t) R_1(t) R_2(t) \left(\frac{g_1}{g_2} - 1 \right) - f_1(t) \left[R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t) \right] \right] \right\} d\lambda. \end{aligned} \quad (3)$$

Унаслідок інтегрування (3) на проміжку $[\lambda, \beta_0]$ отримаємо остаточний варіант граничних умов задачі про часткове підсилення контуру криволінійного отвору в нескінченній пластинці тонким пружним ребром

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) \left[R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + f_1(t) R_1(t) R_2(t) \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \right) \right\} dt + c_1; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) R_1(t) R_2(t) \left(\frac{g_1}{g_2} - 1 \right) - f_1(t) \left[R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t) \right] \right\} dt + c_2, \end{aligned} \quad (4)$$

де c_1, c_2 – сталі інтегрування.

Для визначення компонентів кута повороту нормалі в контурних точках середньої площини пластинки використаємо граничні умови першої і другої основних задач технічної теорії згину [6]

$$\chi\varphi(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\varphi'(\tau)} + \overline{\psi(\tau)} = k(f_1 + if_2) + ik\tilde{C}_1\omega(\tau); \quad (5)$$

$$\varphi(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)} \overline{\varphi'(\tau)} + \overline{\psi(\tau)} = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6)$$

Тут φ, ψ – комплексні потенціали; \tilde{C}_1 – дійсна стала; $\chi = -\frac{3+\nu}{1-\nu}$; $\tau = e^{i\theta}$; $k = \frac{1}{D(1-\nu)}$;

$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$; E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки.

При заданому навантаженні на пластинку функції $\phi(\xi), \psi(\xi)$ мають структуру[6]

$$\varphi(\xi) = -\frac{M_1 + M_2}{4D(1+\nu)} \xi + \varphi_0(\xi), \quad \psi(\xi) = \frac{M_2 - M_1}{2D(1-\nu)} \xi + \psi_0(\xi), \quad (7)$$

де $\varphi_0(\xi), \psi_0(\xi)$ – голоморфні в області $|\xi| > 1$ функції.

Помноживши (5) на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\tau}{\tau - \xi}$ та проінтегрувавши по контуру γ з урахуванням (7), після певних перетворень отримаємо

$$\varphi(\xi) = -\frac{k}{2\pi i \chi} \oint_{\gamma} \frac{f_1 + if_2}{\tau - \xi} d\tau + \frac{M_1 + M_2}{4D(1+\nu)\chi} \frac{\xi}{\xi^{N-1}} - \frac{M_2 - M_1}{2D(1-\nu)\chi} \frac{1}{\xi} - \frac{M_1 + M_2}{4D(1+\nu)} \xi + \frac{i\tilde{C}_1 k}{\chi} \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}}. \quad (8)$$

Віднімаючи співвідношення (5) і (6), знаходимо на контурі γ

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = k(f_1 + if_2) + ik\tilde{C}_1 \omega(\sigma) + (1 - \chi)\varphi(\sigma). \quad (9)$$

Застосовуючи до (8) формули Сохоцького-Племеля [7] і підставляючи отримані результати в (9), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} = & \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f'_1(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'_2(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{3+\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \cos \lambda - \right. \\ & - \frac{1-\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \varepsilon \cos(N-1)\lambda + 2(M_2 - M_1) \cos \lambda - (1-\nu)\tilde{C}_1 \varepsilon \sin(N-1)\lambda - \\ & \left. - (3+\nu)\tilde{C}_1 \sin \lambda \right\} + C_1; \\ \frac{\partial w}{\partial y} = & \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f'_2(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'_1(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{3+\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \sin \lambda + \right. \\ & + \frac{1-\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \varepsilon \sin(N-1)\lambda - 2(M_2 - M_1) \sin \lambda - (1-\nu)\tilde{C}_1 \varepsilon \cos(N-1)\lambda + \\ & \left. + (3+\nu)\tilde{C}_1 \cos \lambda \right\} + C_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут C_1, C_2, \tilde{C}_1 – дійсні сталі.

Підстановка (10) у граничні умови (4) призводить до системи двох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з логарифмічними ядрами для знаходження функцій f_1, f_2

$$\begin{aligned} & \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) \left[R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + f_1(t) R_1(t) R_2(t) \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \right) \right\} dt = \\ & = \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f'_1(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'_2(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{3+\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \cos \lambda - \right. \\ & - \frac{1-\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \varepsilon \cos(N-1)\lambda + 2(M_2 - M_1) \cos \lambda - (1-\nu)\tilde{C}_1 \varepsilon \sin(N-1)\lambda - \\ & \left. - (3+\nu)\tilde{C}_1 \sin \lambda \right\} + \hat{C}_1; \\ & \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) R_1(t) R_2(t) \left(\frac{g_1}{g_2} - 1 \right) - f_1(t) \left[R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t) \right] \right\} dt = \\ & = \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f'_2(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'_1(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{3+\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \sin \lambda + \right. \\ & + \frac{1-\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2) \varepsilon \sin(N-1)\lambda - 2(M_2 - M_1) \sin \lambda - (1-\nu)\tilde{C}_1 \varepsilon \cos(N-1)\lambda + \\ & \left. - (3+\nu)\tilde{C}_1 \cos \lambda \right\} + \hat{C}_2, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\hat{C}_1 = C_1 - c_1, \hat{C}_2 = C_2 - c_2$.

Крім системи (11) повинні виконуватись умови рівноваги підсилення [1]

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) dt = 0, \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt = 0 \quad (12)$$

і умова однозначності прогину [6]

$$\frac{\varepsilon(1+\chi)}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [f_1'(t) \cos((N-1)t) - f_2'(t) \sin((N-1)t)] dt + (\varepsilon^2(N-1) + \chi) \tilde{C}_1 = 0, \quad (13)$$

які служать для визначення сталих $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$.

Якщо функції $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ стануть відомими, то контактні напруження визначаємо залежностями

$$M_\rho = \frac{(f_2'(\lambda) \cos \lambda - f_1'(\lambda) \sin \lambda) \alpha(\lambda) - (f_2'(\lambda) \sin \lambda + f_1'(\lambda) \cos \lambda) \beta(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)},$$

$$P = - \frac{(f_2'(\lambda) \sin \lambda + f_1'(\lambda) \cos \lambda) \alpha(\lambda) + (f_2'(\lambda) \cos \lambda - f_1'(\lambda) \sin \lambda) \beta(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)}. \quad (14)$$

Кільцеві M_λ і крутні $H_{\rho\lambda}$ моменти на контурі L знаходимо за формулами [4]

$$M_\lambda = \nu M_\rho - \frac{1+\nu}{k} X; \quad H_{\rho\lambda} = -\frac{Y}{k}.$$

Внутрішні згинальні L_ρ і крутильні L_λ моменти в підсиленні визначаємо із співвідношень [7]

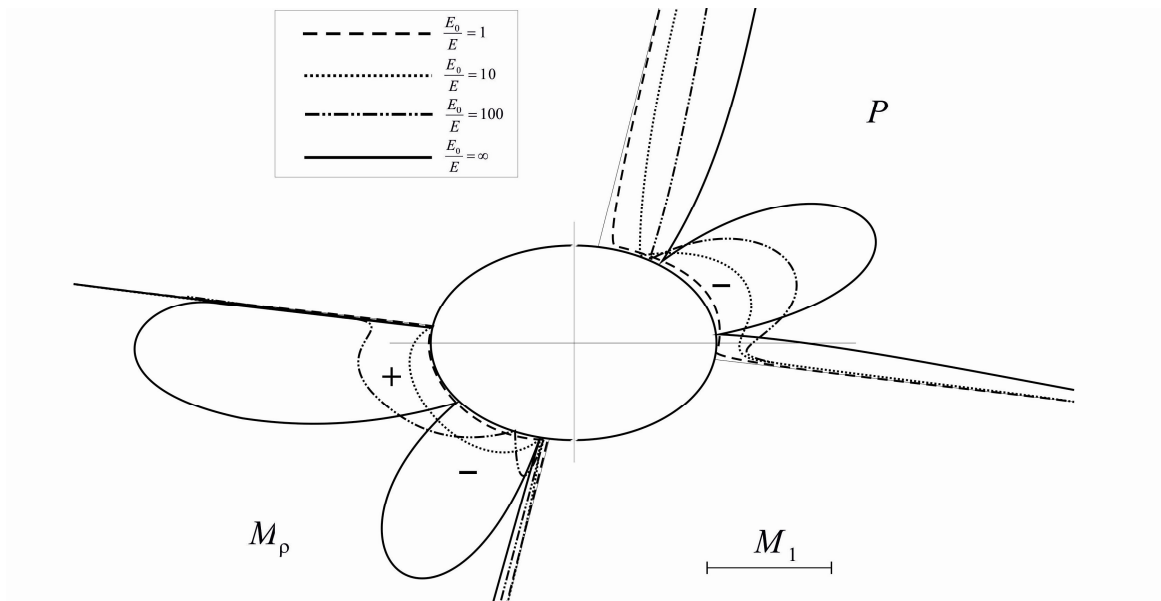
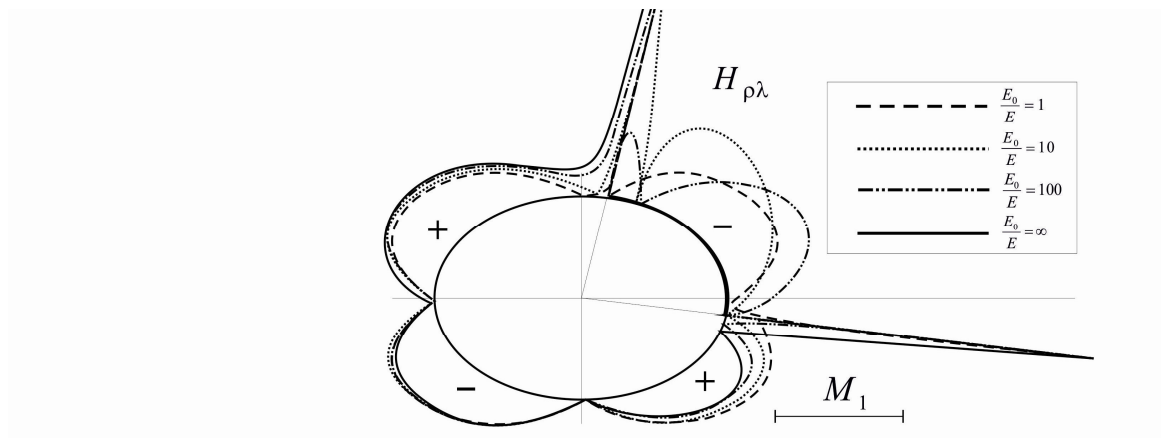
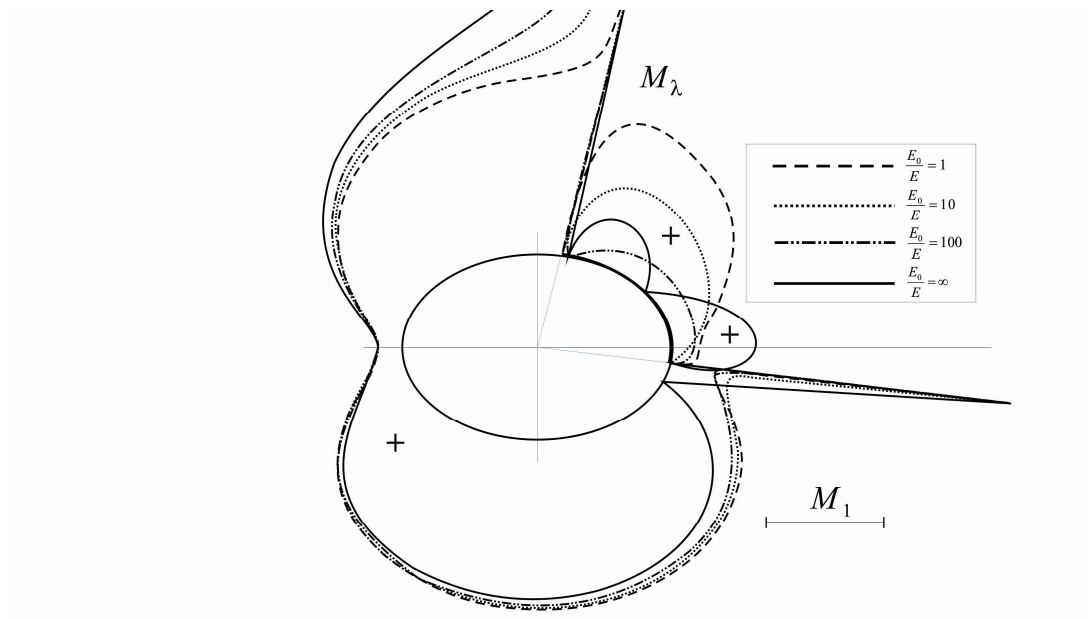
$$L_\rho = \frac{g_1}{D(1-\nu^2)} (M_\lambda - \nu M_\rho); \quad L_\lambda = \frac{g_2}{D(1-\nu)} H_{\rho\lambda}.$$

Розглянемо окремі випадки задачі (11)–(13):

- поклавши в (11)–(13) $g_1 \rightarrow \infty, g_2 \rightarrow \infty$, одержимо систему рівнянь задачі для випадку абсолютно жорсткого підсилення [8];
- при $g_1 \rightarrow 0, g_2 \rightarrow 0$ (підкріплення відсутнє) із (11)–(13) знаходимо розв'язок задачі для нескінченної пластини з непідкріпленим криволінійним отвором [8];
- якщо $\varepsilon = 0$ то система (11)–(13) визначає розв'язок відповідної задачі для кругового отвору;
- при $g_2 \rightarrow 0$, із (11)–(13) отримаємо розв'язок задачі у випадку, коли підсилення має тільки згинальну жорсткість [1–3].

Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок задачі (11)–(13) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання необхідно встановити структуру функцій $f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_1'(\lambda), f_2'(\lambda)$ на кінцях зони підсилення. Функції $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ обмежені на ділянці підсилення, а на її кінцях дорівнюють нулю. Контактні моменти на кінцях ділянки підсилення мають кореневу особливість [4]. На підставі (14) таку ж особливість будуть мати функції $f_1'(\lambda), f_2'(\lambda)$. Виходячи з цього, наближений розв'язок задачі можна знайти методом механічних квадратур і колокації [9].

Для підсилювального ребра з параметрами $\alpha_0 = -10^\circ$ (град), $\beta_0 = 80^\circ$ (град), $h_0/h = 1$, $b_0/\rho_0 = 1/20$, $b_0/h_0 = 1/3$ проведено розрахунки компонентів напруженого стану на контурі еліптичного отвору $N = 2$, $\varepsilon = 0.15$. Результати розрахунку при $M_1 = 1, M_2 = 0$ проілюстровано на рис. 2–4 (E_0 – модуль Юнга матеріалу підсилення).

Рисунок 2. Графіки розподілу моментів M_ρ, P у зоні підсиленняРисунок 3. Графіки розподілу моментів $H_{\rho\lambda}$ по контуру отворуРисунок 4. Графіки розподілу моментів M_λ по контуру отвору

Висновки. Із наведених результатів бачимо, що:

- збільшення жорсткості підсилювальних ребер призводить до суттєвого зменшення кільцевих M_λ і крутних $H_{\rho\lambda}$ та збільшення нормальних M_ρ і дотичних P моментів на ділянці підсилення;
- напружений стан поза зоною підсилення практично не залежить від жорсткості підсилювальних елементів;
- поблизу торців підсилення моменти P , M_ρ , M_λ , $H_{\rho\lambda}$ необмежено зростають.

Література

1. Сяський, А. Основні інтегральні співвідношення в технічній теорії згину пластин з отворами [Текст] / А. Сяський, С. Гаврюсєв // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – Т. 11, №1. – С. 12–17
2. Сяський, А. Контактна взаємодія пластин з криволінійними отворами і розіmkнених несиметричних ребер змінної жорсткості [Текст] / А. Сяський, Н. Шевцова // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – Т. 11, №3. – С. 20–26.
3. Сяський, А.О. Дослідження несиметричності підсилення контуру пластинки розіmkненим ребром змінної жорсткості [Текст] / А.О. Сяський, Н.В. Шевцова // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник за напрямом «Інженерна механіка». – Луцьк, 2007. – Випуск 20 (2). – С. 205–210.
4. Сяський, А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием [Текст] / А.А. Сяський // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, №2. – С. 247–254.
5. Сяський, А.А. Изгиб анизотропных пластин с криволинейными ребрами жесткости [Текст] / А.А. Сяський. – Ровно, 1988. – 14с. – Деп. в УкрНИИТИ 19.01.1989, №352-Ук 89.
6. Бережницький, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин [Текст] / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявський, В.В. Панасюк. – Киев: Наукова думка, 1979. – 400с.
7. Савин, Г.Н. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости [Текст] / Г.Н. Савин, Н.П. Флейшман. – Киев: Наукова думка, 1964. – 384 с.
8. Прусов, И.А. Метод сопряжения в теории плит [Текст] / И.А. Прусов. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256с.
9. Трохимчук, О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсилений контур криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці [Текст] / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2009. – Т. 14, №2. – С. 30–36.

Отримано 05.04.2011